Nombres complexes 1

Objectifs :

— Savoir effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes, savoir déterminer et utiliser le conjugué d'un nombre complexe sous forme algébrique

— Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré à coefficients réels

— Faire le lien entre un nombre complexe et sa représentation dans le plan

Aperçu historique :

Vous connaissez déjà différents ensembles de nombres tous inclus les uns dans les autres : les entiers naturels ($\mathbb{N}$), les entiers relatifs ($\mathbb{Z}$), les rationnels[1] ($\mathbb{Q}$) et enfin les réels ($\mathbb{R}$). Historiquement, ces ensembles de nombres ne sont pas apparus dans cet ordre ; cependant, on peut les découvrir successivement grâce à des équations de plus en plus élaborées :

— l'équation $x-5=0$ a une solution dans $\mathbb{N}$ ($x=5$) par contre l'équation $x+3=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$; l'ensemble $\mathbb{N}$ n'est donc pas suffisant !

— cette équation $x+3=0$ a une solution dans $\mathbb{Z}$ ($x=-3$) par contre l'équation $3x+1=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$; l'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est donc pas suffisant !

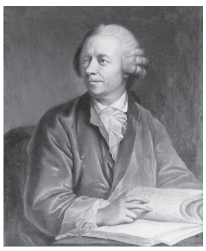
— cette équation $3x+1=0$ a une solution dans $\mathbb{Q}$ ($x=-\frac{1}{3}$) par contre l'équation $x^2-2=0$ n'a pas de solution[2] dans $\mathbb{Q}$; l'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est donc pas suffisant !

— cette équation $x^2-2=0$ a deux solutions ($x=\pm\sqrt{2}$) dans $\mathbb{R}$ par contre l'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$; l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est donc pas suffisant !

L'ensemble des réels n'étant pas suffisant, il faut donc « créer » un ensemble de nombres plus grand contenant les solutions aux telles équations : c'est ce qu'on va appeler l'ensemble des nombres complexes constitué des réels et de nouveaux nombres appelés nombres imaginaires. Cet ensemble des nombres complexes sera noté $\mathbb{C}$.
En fait, les premiers à utiliser de tels nombres furent les mathématiciens italiens de la renaissance en particulier Cardan *et* Bombelli *(*XVI*e siècle) qui parlèrent de nombres dont le carré est négatif, ceci afin de résoudre les équations du type $x^3+px+q=0$.*
Par la suite Euler *(1707 - 1783) eut l'idée de remplacer « $\sqrt{-1}$ » par la lettre i (i comme imaginaire) : il est donc incorrect d'utiliser les notations « $\sqrt{-1}$ », « $\sqrt{-2}$ » et plus généralement « $\sqrt{-p}$ » où $p>0$!*
Finalement, avec cette notation, l'équation $x^2+1=0$ a deux solutions imaginaires : i et $-i$. En effet $x^2+1=0$ équivaut à $x^2-i^2=0$ soit $(x-i)(x+i)=0$.

Cardan

Bombelli



Euler

1. Il existe aussi l'ensemble des décimaux $\mathscr{D}$ entre les entiers relatifs et les rationnels, mais il a peu d'intérêt ici.
2. En effet les solutions de cette équation sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Supposons que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ avec p et q dans $\mathbb{N}^*$ avec $\frac{p}{q}$ irréductible. Alors $p^2=2q^2$ donc p^2 est pair et donc p aussi (car le produit de 2 impairs est impair donc p ne peut être impair) donc $p=2k$, $k\in\mathbb{N}$ et finalement $q^2=2k^2$ donc q^2 est pair donc q aussi. Ce dernier résultat est absurde car $\frac{p}{q}$ est irréductible donc p et q ne peuvent être pairs tous les deux. Notre supposition est donc fausse et il n'existe donc pas d'entiers p et q tels que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$.

1. L'ensemble des nombres complexes

A. Définitions

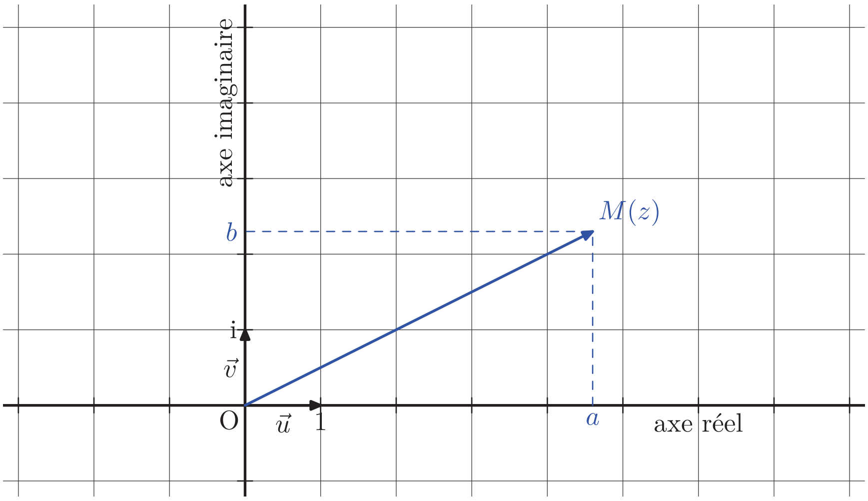
Définition 1.1 Un nombre complexe z est un nombre qui s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont des réels et i un nombre imaginaire vérifiant $i^2 = -1$.
L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Remarque 1.1 Quelques points de vocabulaire à connaître :
- l'écriture $z = a + ib$ est appelée forme algébrique du nombre complexe z ;
- le nombre réel a est appelé partie réelle de z : on note $a = \Re(z)$;
- le nombre réel b est appelé partie imaginaire de z : on note $b = \Im(z)$;
- si $a = 0$, on dit que z est un imaginaire pur ; on note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs ;
- si $b = 0$, z est un réel ;
- si $a = b = 0$, z est le nombre complexe nul.

Exemple 1.1 $3 + 5i$, $\sqrt{2} - i\sqrt{5}$, $-\frac{1}{3} + i \times 10^3$ sont des nombres complexes ;
4, $\sqrt{5}$, e^4, $-\frac{4}{3}$ sont des réels donc ce sont aussi des nombres complexes ;
$5i$, $-i\sqrt{8}$, $i\pi$ sont des imaginaires purs : ce sont aussi des nombres complexes.

B. Interprétation géométrique

Un nombre complexe étant caractérisé par deux réels, il est naturel de lui associer un point (ou un vecteur) dans le plan rapporté à un repère orthonormé.



Le plan muni d'un tel repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est appelé plan complexe. En effet, à chaque complexe $z = a + ib$, on peut associer un unique point (celui de coordonnées $(a; b)$) et à chaque point $M(x; y)$ du plan, on peut associer un unique complexe $z = x + iy$. On dit que le plan et $\mathbb{C}$ sont en bijection [3].
Dans le plan complexe, on dit que :
- le point M est l'image de z, on écrit $M(z)$;
- le complexe z est l'affixe de M (et aussi du vecteur $\vec{OM}$), on écrit $z = \mathrm{aff}(M) = \mathrm{aff}(\vec{OM})$.

Exemple 1.2 L'affixe du point $A(3; -2)$ du plan complexe est le nombre complexe $z_A = 3 - 2i$.
L'image du complexe $z_B = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ est le point $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. Cela signifie à peu près ≪ correspondance un à un ≫

C. Opérations sur les complexes

Les règles opératoires (distributivité, double distributivité, ...) restent valables pour les complexes, ainsi on peut définir :

l'égalité : deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire ;

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(z) = \Re(z') \\ \Im(z) = \Im(z') \end{cases}$$

la somme : la somme de deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ est le nombre complexe dont la partie réelle est la somme des parties réelles de z et z' et la partie imaginaire est la somme des parties imaginaires de z et z' ;

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

le produit : le produit de deux nombres complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ est défini comme suit :

$$(a + ib)(a' + ib') = aa' + ab'i + iba' + i^2bb' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

l'inverse : l'inverse d'un nombre complexe $z = a + ib$ non nul est défini comme suit :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1 \times (a - ib)}{(a + ib) \times (a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2}$$

le quotient : le quotient de deux complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec $z' \neq 0$ est défini comme suit :

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + ib}{a' + ib'} = \frac{(a + ib)(a' - ib')}{(a' + ib') \times (a' - ib')} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i\frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}$$

Exemple 1.3 On donne $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -5 + 4i$, $z_3 = -2$ et $z_4 = -3i$.
Effectuer les calculs suivants :

$$z_1 + z_2; \quad z_1 + z_4; \quad z_3 + z_4; \quad z_1 \times z_2; \quad z_4^3; \quad z_1 \times z_4; \quad \frac{1}{z_1}; \quad \frac{z_1}{z_2}; \quad \frac{z_1}{z_4}$$

2. Nombre complexe conjugué

A. Définition et interprétation

Définition 1.2 Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a + ib$. On appelle nombre complexe conjugué de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ (on lit z barre) égal à $a - ib$.

Exemple 1.4 Le conjugué de $2 + 3i$ est $2 - 3i$. Le conjugué de 5 est 5. Le conjugué de $-2i$ est $2i$.

Remarque 1.2 Si M et M' ont pour affixes z et $\overline{z}$ alors M et M' sont symétriques par rapport à l'axe réel.

B. Propriétés

Propriété 1.1 Dans cette propriété, z et z' sont deux nombres complexes d'écritures algébriques respectives $a + ib$ et $a' + ib'$. Alors :

1) $a = \Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $b = \Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$;
2) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$;
3) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$;
4) $\overline{\overline{z}} = z$
(on dit que la conjugaison est « involutive »)
5) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;
6) $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$;
7) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$;
8) pour $z \neq 0$, on a : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$;
9) si $z' \neq 0$, on a : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$;
10) pour $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Démonstration :

1) on a $\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{a+ib+a-ib}{2} = \frac{2a}{2} = a$ et $\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{a+ib-(a-ib)}{2i} = \frac{2b}{2} = b$;

2) $\begin{aligned} z = \overline{z} &\Leftrightarrow a+ib = a-ib \quad ; \\ &\Leftrightarrow a = a \text{ et } b = -b \\ &\Leftrightarrow b = 0 \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} z = -\overline{z} &\Leftrightarrow a+ib = -(a-ib) \quad ; \\ &\Leftrightarrow a = -a \text{ et } b = b \\ &\Leftrightarrow a = 0 \\ &\Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \end{aligned}$

4) $\overline{\overline{z}} = \overline{a-ib} = a-(-ib) = a+ib = z$;

5) $\overline{a+ib+a'+ib'} = \overline{(a+a')+i(b+b')} = (a+a')-i(b+b') = a-ib+a'-ib' = \overline{z}+\overline{z'}$;

6) $\overline{a+ib-a'+ib'} = \overline{(a-a')+i(b-b')} = (a-a')-i(b-b') = a-ib-(a'-ib') = \overline{z}-\overline{z'}$;

7) $\overline{z \times z'} = \overline{(aa'-bb')+i(ab'+a'b)}$ et :
$\overline{z} \times \overline{z'} = (a-ib)(a'-ib') = aa'+bb'i^2 - i(ab'+a'b) = (aa'-bb')-i(ab'+a'b) = \overline{z \times z'}$;

8) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}} = \frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{b}{a^2+b^2}$ et : $\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{a-ib} = \frac{a}{a^2+(-b)^2}+i\frac{-(-b)}{a^2+(-b)^2} = \frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{b}{a^2+b^2} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$;

9) $\overline{\frac{z}{z'}} = \overline{z \times \frac{1}{z'}} = \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$;

10) Il suffit d'utiliser un raisonnement par récurrence (voir page ??) : pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle P_n la proposition $\overline{z^n} = \overline{z}^n$. P_0 est évidemment vraie et en faisant l'hypothèse que pour un n fixé dans $\mathbb{N}^*$, P_n est vraie on montre sans difficulté avec le point 7 de cette propriété que P_{n+1} est vraie. L'axiome de récurrence nous permet donc d'affirmer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n < 0$, on a $\overline{z^n} = \overline{\left(\frac{1}{z^{-n}}\right)}$ et $-n > 0$ donc on applique 10 pour $-n > 0$ et 8.

3. Équation du second degré à coefficients réels

Soit a, b et c trois réels avec $a \neq 0$. On considère l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ et on pose $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant.
On a vu en première que si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle ; pourtant l'équation x^2+1 a un discriminant négatif (-4) et possède deux solutions complexes : i et $-i$. On en déduit donc la :

Propriété 1.2 Soit r un réel, alors :
- pour $r > 0$, l'équation $x^2 = r$ admet deux solutions réelles : $\sqrt{r}$ et $-\sqrt{r}$;
- pour $r = 0$, l'équation $x^2 = r$ admet une unique solution : 0 ;
- pour $r < 0$, l'équation $x^2 = r$ admet deux solutions complexes conjuguées : $i\sqrt{-r}$ et $-i\sqrt{-r}$.

Théorème 1.1 On considère l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ et on pose $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant. Alors :
- si $\Delta > 0$ l'équation a deux solutions réelles $\alpha = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution réelle $\gamma = -\frac{b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées $(overline\alpha = \beta)$:

$$\alpha = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } \beta = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Démonstration (dans le cas où $\Delta < 0$)

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{(2a)^2}\right) \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right) - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right) + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\left(x - \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exemple 1.5 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.
On a $\Delta = -3$, l'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$\alpha = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ et } \beta = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Exemple 1.6 À tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z^2+1}{2-z}$. Existe-t-il des points fixes pour cette transformation ? (C'est-à-dire des points M tels que $M' = M$.)

Remarque 1.3 Les deux solutions complexes sont conjuguées l'une de l'autre.